Ing. Ramón Salas Edwards

Ganancias y pérdidas en el Casino

PARRAFOS DE UNA CARTA

"Usted ha indicado a los contadores un camino para evitar logaritmos en los cálculos de deudas con amortización; pero los antiguos alumnos tenemos mejor derecho, don Ramón... ¿qué se puede demostrar del punto y banca y las pintorescas chanzas simples de Viña del Mar?... ya estamos strugling for life, pero todavía podemos pasarle un plumerito a las integrales".

El viejo profesor para colaborar, siquiera ahorrándoles tiempo, con los colegas que produciendo bienes levantan el standard de vida, se ha puesto a contestar la interrogación escrita, a su turno temeroso y agradecido al joven profesor Lehmann por sus interesantes observaciones y con el propósito de tratar en un futuro artículo la cuestión general.

¿Una opinión? Las matemáticas la dan a los matemáticos. Retumban riesgos trágicos: en la guerra atómica se juega la civilización y en el materialismo, la vida eterna.

BALANCES EN EL PUNTO, LA BANCA Y LAS CHANZAS SIMPLES

En el cuadro adjunto aparecen para estos juegos, aunque se cambien de uno a otro como se quiera, los balances o saldos probables, positivos o negativos, que dejarán a los diferentes jugadores sus ganancias menos sus pérdidas, tomando para cada persona como unidad, el monto de sus posturas, si son uniformes, y el término medio de ellas, si son variables.

Se denomina rango o suerte de un jugador el valor a que se llega ordenando, a partir del más afortunado, un número de personas según los balances que han tenido al cabo de las jugadas determinadas y dividiendo por el total de personas el número de las que lo preceden, incluyendo la mitad de las que tienen igual balance.

Para contar las jugadas no importa que sean consecutivas, simultáneas en distintas mesas, separadas por temporadas o hechas por diferentes personas que tengan caja común.

Ejemplo: Una persona juega a banca si punto ha ganado las dos veces anteriores y a punto si las dos veces anteriores ha triunfado banca. Si el jugador ha ganado con su postura anterior pone $ 100 y si ha perdido pone $ 400.

La postura media es $ 250. Nada importa el sistema porque las jugadas futuras no dependen de las anteriores.

Al cabo de 100 posturas la cuarta parte más afortunada de las personas que procedieran así, habría ganado 1000 o más pesos (rango 0,25 del cuadro) y la cuarta parte con más mala suerte habría perdido $ 2500 o más (rango 0,75).

En 1000 jugadas, 23 % de los jugadores resultaría con alguna ganancia (rango 0,23) y 77 % perdiendo; pero sería raro, un caso en 100 (rango 0,01) que alguna llegara a ganar en estas jugadas $ 13000, e igualmente raro que llegara a perder $ 25000 (rango 0,99). En término medio perderían $ 6000 cada uno en las 1000 jugadas.

RANGO	JUGADAS			
	100	1000	10.000	40.000
0.01........	20	50	— 20	— 550
0.10........	10	16	—120	— 750
0.25........	4	— 2	—180	— 850
0.50........	— 2	— 24	—250	—1000
0.75........	—10	— 50	—320	—1100
0.90........	—16	— 70	—380	—1300
0.99........	—26	—100	—500	—1500

Demostración: Las cifras del cuadro han sido calculadas por la siguiente expresión del balance probable B para el rango R, al cabo de J jugadas:

$$B = F(R) \cdot \sqrt{J} - 0.025\ J.$$

En esta fórmula la función F del rango R, tiene los siguientes valores; positivos en los rangos superiores y negativos en los inferiores:

R	0.01; 0.99	0.10; 0.90	0.25; 0.75	0.50
F(R)	± 2,3	± 1,3	± 0,7	0

Término aleatorio.—El primer término de esta expresión es válido para todos los juegos en que no cobra contribución el casino y las probabilidades de ganar o perder una jugada son iguales a 0,5.

Establecer que este término aleatorio es el producto de dos factores, uno función de R y el otro igual a raíz de J, equivale a demostrar que en la hipótesis considerada, R es una función de la razón $B : \sqrt{J}$.

$$B = F(R) \cdot \sqrt{J}; \qquad R = R\left(\frac{B}{\sqrt{J}}\right).$$

La función R es la solución de una ecuación diferencial en que figuran únicamente la variable $B : \sqrt{J}$ y las derivadas primera y segunda de la función R, respecto a ella.

Esta ecuación diferencial expresa la evolución del juego: entre un conjunto de personas que han jugado J jugadas, el número de las que tienen el balance B después de la jugada, es la mitad de la suma de los que tenían en la anterior B - 1, porque ganaron, más la mitad de los que tenían B + 1, porque perdieron.

Dividiendo estos números por el total de jugadores del conjunto, se obtiene una relación entre los incrementos correspondientes del rango R.

La suma de los dos incrementos de la función R corresponde al incremento de la variable $B : \sqrt{J}$ producido por un incremento de J igual a la unidad. Los dos sumandos son incrementos de la función R, que corresponden a dos incrementos de $B : \sqrt{J}$; producidos por dos incrementos de B iguales a una unidad, pero uno positivo y otro negativo; de estos resultan para la función R dos incrementos de cuyos desarrollos de Taylor, se destruyen los términos proporcionales a la primera derivada de R y se suman los términos iguales al producto de la segunda derivada de R por la mitad del cuadrado del incremento de la variable:

$$R'\left(\frac{B}{\sqrt{J}}\right) \cdot \frac{d}{dJ}\frac{B}{\sqrt{J}} = R''\left(\frac{B}{\sqrt{J}}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dB}\frac{B}{\sqrt{J}}\right)^2$$

$$R''\left(\frac{B}{\sqrt{J}}\right) = -\frac{B}{\sqrt{J}} \cdot R'\left(\frac{B}{\sqrt{J}}\right)$$

Queda así establecida la descomposición de B en sus dos factores y sin necesidad de recurrir a la función trascendente que resuelve esta ecuación diferencial y determinar sus constantes arbitrarias, basta calcular los valores de F (R) para un valor de J, considerando que supuestas iguales las probabilidades de ganar y de perder cada jugada, la frecuencia con que se tiene el balance B es proporcional al número de permutaciones que admiten las jugadas ganadas y perdidas, que dan este balance:

$$\frac{J!}{\frac{J+B}{2}!\,\frac{J-B}{2}!}$$

Estos son los conocidos coeficientes de la potencia J del binomio de Newton; hasta la potencia 15 están en el manual Hütte.

He aquí para este número de jugadas y los balances B que interesan, los valores de F (R) que resultan de dividir B por la raíz de 15 y los de R que se obtiene dividiendo por la suma total de coeficientes, la suma de los anteriores, incluso la mitad del que corresponde al balance.

B	1	3	5	9
F(R)	0.26	0.77	1.29	2.30
R	0.40	0.23	0.11	0.01

Interpolando entre estos valores, se obtiene los indicados anteriormente, válidos aunque sea muy grande el número de jugadas.

Contribución cobrada.—En las chanzas simples se determina al azar, mediante una ruleta, un número entre 37, de los cuales 19, entre ellos el cero, significan la pérdida de la postura y los 18 restantes la ganancia de igual cantidad. La contribución cobrada es por consiguiente en promedio 1:37 de las posturas.

En el juego de punto y banca se determina mediante cartas, pero por puro azar, cual bando gana; si gana punto los jugadores de este bando reciben una suma igual a sus posturas; pero si banca triunfa, los jugadores a banca reciben sólo una cantidad igual al 90 % de sus posturas. Para que las esperanzas de ambos bandos sean equivalentes, las reglas para consultar las cartas han de dar el triunfo a banca 20 veces de cada 39 y a punto las 19 restantes, en término medio. La contribución es por consiguiente en promedio 1:39 de las posturas.

El segundo término de la fórmula de B, supone uniformemente una contribución de 0,025 de las posturas, para simplificar el cálculo.

Se ha tomado esta cifra en todos los rangos, a pesar de que los jugadores a banca de los primeros rangos pagan un poco más y los últimos un poco menos, porque la contribución se cobra en las jugadas ganadas. A la inversa los jugadores de chanzas simples pagan menos en los primeros rangos y en los últimos más, porque el pago, representable por el cero, se presenta con una frecuencia proporcional al número de jugadas perdidas.

Postura media.—El valor en dinero que corresponde al término aleatorio, es el producto del factor función del rango, por la raíz del número de jugadas y por el monto de la postura.

Los riesgos y las expectativas para dos personas que juegan distinto número de jugadas, cada persona con posturas uniformes pero las dos diferentes, resultan idénticos si los números de jugadas son inversamente proporcionales a los cuadrados de las posturas. El valor medio para calcular sólo el sumando aleatorio sería por consiguiente, el término medio cuadrático de las posturas.

La contribución que cobra el casino corresponde al término medio aritmético.

Puede aceptarse este usual término medio aritmético, como postura media, dentro de la aproximación que tienen las cifras del cuadro.

R. S. E.