CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Conclusion)

Derivamos sucesivamente (17) respecto a x e y, tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

O bien

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

De estas últimas ecuaciones se pueden deducir los valores de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i llevarlos en la ecuacion (16); ésta debe entónces estar idénticamente satisfecha, luego se debe tener

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - a^2\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - a^2\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

De la primera ecuacion se deduce

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \pm a\frac{\partial f}{\partial p}$$

Adoptaremos el signo +. Por lo demas el resultado de la integracion no debe cambiar cuando se reemplaza a por $-a$ puesto que tampoco cambia, en este caso, la ecuacion propuesta (16).

Habiendo adoptado el signo + las condiciones obtenidas se reducen a

$$a\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} - a\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \tag{19}$$

La ecuacion (18) es una relacion lineal entre las derivadas parciales de la funcion f respecto de p i q; escribiremos

$$\frac{dp}{a} = \frac{dq}{-1}$$

Luego

$$p+aq=C_1$$

La funcion f será por consiguiente una funcion cualquiera de $p+aq$, ademas esta funcion podrá contener arbitrariamente las variables x, y, z que no figuran esplícitamente en la ecuacion (18); en resúmen se tendrá

$$f=\psi\,(p+aq, x, y, z)$$

Ahora la ecuacion (19) puede escribirse

$$\frac{\partial f}{\partial x} - a\,\frac{\partial f}{\partial y} + \left(p - aq\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Esta ecuacion será satisfecha idénticamente si se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(20) $$\frac{\partial f}{\partial x} - a\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Entónces la funcion f no contiene z esplícitamente i las variables x, y figuran en ella de tal manera que la ecuacion (20) sea satisfecha; ahora, de esta ecuacion se deduce

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-a}$$

Luego

$$x+ay=C_2$$

Finalmente f es una funcion cualquiera de $p+aq$ i de $x+ay$; la integral primera de (16) puede escribirse por consiguiente

$$p+aq=\psi(x+ay)$$

Ella contiene una funcion arbitraria ψ. La ecuacion anterior es una ecuacion lineal entre las derivadas parciales de primer órden de la funcion buscada; ademas ella contiene un segundo miembro. Se ha examinado mas arriba esta clase de ecuaciones i la regla de integracion consiste en escribir las ecuaciones

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{a}=\frac{dz}{\psi(y+ax)}$$

De las dos primeras se deduce

$$y-ax=C'_1$$

En seguida se puede escribir

$$\frac{dz}{\psi(y+ax)}=\frac{d(y+ax)}{2a}$$

De aquí se deduce que z es una funcion de $y+ax$, luego se puede escribir

$$z=\psi_1(y+ax)+C'_2$$

Finalmente, la solucion jeneral será una funcion arbitraria de C'_1 i C'_2; esto equivale a

$$z=\psi_1(y+ax)+\psi_2(y-ax)$$

Tal es por consiguiente la integral de la ecuacion propuesta; ψ_1 i ψ_2 son dos funciones arbitrarias.

Se averigua que z no cambia de forma cuando se cambia a en $-a$.

Hai varios otros métodos para integrar la ecuacion (16).

1.º *D'Alembert* procedió de la manera siguiente:

Se tiene

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy$$

O bien, segun (16),

$$dp = a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy$$

Por otra parte se tiene tambien

$$dq = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy$$

Luego

$$dp + a\,dq = (dy + a\,dx)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

O bien

$$d\,(p + aq) = d\,(y + ax)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Esto prueba que $p + aq$ es una funcion de $y + ax$; sea

$$p + aq = 2a\,\psi'_1\,(y + ax)$$

Del mismo modo se obtendria

$$p - aq = 2a\,\psi'_2\,(y - ax)$$

Luego

$$p = a\,\psi'_1\,(y + ax) - a\,\psi'_2\,(y - ax)$$

$$q = \psi'_1\,(y + ax) + \psi'_2\,(y - ax)$$

Es visible que la funcion z es

$$z = \psi_1\,(y + ax) + \psi_2\,(y - ax)$$

2.º Cambiemos las variables en la ecuacion (16) i hagamos

$$y + ax = u$$

$$y - ax = v$$

Tendremos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = a\,\frac{\partial z}{\partial u} - a\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

O bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Al llevar estos valores en (16) se obtiene simplemente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

O bien

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)}{\partial v} = 0$$

Segun esto

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \psi'_1(u)$$

$$z = \psi_1(u) + \psi_2(v)$$

O bien

$$z = \psi_1(y + ax) + \psi_2(y - ax)$$

CAPÍTULO IV

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

Sea la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y,' y'' \ldots, \; z, z,' z'' \ldots, \; u, u,' u'' \ldots) \, dx$$

en la cual las letras acentuadas representan las derivadas consecutivas de y, z, $u \ldots$ respecto de x. Para calcular el valor de I es necesario conocer y, z, $u \ldots$ en funcion de x i es bien evidente que, en jeneral, I cambiara si se cambia la forma de las espresiones de y, z, $u \ldots$ en funcion de x.

El objeto del cálculo de las variaciones es de determinar la forma de estas funciones de tal manera que I tenga un valor máximo o mínimo.

Examinaremos aquí el caso sencillo de una funcion f de x, y, y' i supondremos que los límites a i b de la integral quedan fijos, tenemos por consiguiente

$$(1) \qquad I = \int_a^b f(x, y, y') \, dx$$

Reemplacemos y por $y + \delta y$ i supongamos que δy sea cierta funcion de x que se anula cuando $x = a$ i $x = b$; I se cambiará en $I + \Delta I$ i se tendrá

$$I + \Delta I = \int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y') \, dx$$

Luego

$$\Delta I = \int_a^b \left\{ f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x, y, y') \right\} dx$$

δy se llama *variacion* de y i ΔI es la *variacion* correspondiente de la integral I.

Podemos desarrollar ΔI segun las potencias crecientes de δy; sea entónces δI la suma de los términos de primer órden, tendremos evidentemente

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

Abora

$$\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y+\delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

O bien

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

Por consiguiente

$$\delta I = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} dx$$

Apliquemos la regla de la integracion por partes a este último término, tendremos

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y - \int \delta y \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} dx$$

Luego, si se observa que δy es nulo en los límites a i b,

$$\int_{a} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} dx = -\int_{a}^{b} \delta y \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} dx$$

Finalmente, el valor de δI es

$$(2) \qquad \delta I = \int_{a}^{b} \delta y \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} \right\} dx$$

Si el valor adoptado para y hace máximo o mínimo el valor de I, la variacion ΔI de la integral debe conservar un mismo signo, cualquiera que sea el signo de la variacion infinitamente pequeña δy, luego, lo mismo como en la teoría del máximo i mínimo, δI debe ser igual a cero.

Como δy tiene un valor arbitrario, la condicion necesaria i suficiente para que δI sea nulo es que el coeficiente de δy sea nulo; se debe tener por consiguiente

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} = 0$$

Por hipótesis la funcion f contiene y' o $\frac{dy}{dx}$, luego la ecuacion (3) contendrá $\frac{d^2y}{d^2x}$; en resúmen la funcion buscada debe satisfacer a una ecuacion diferencial del segundo órden.

Brakistocrona

Sean O i A dos puntos dados; tratemos de determinar el camino que debe recorrer un punto material pesado, para pasar de O en A en el tiempo mínimo.

Elejimos los ejes de coordenadas de tal manera que O sea el oríjen i OX la vertical del punto O; supongamos ademas que las abcisas positivas se cuenten hácia abajo.

Sea h la abcisa del punto A, es decir la diferencia de alturas de los dos puntos dados.

A un momento dado el punto material tendrá una abcisa x, i su velocidad será v. Se supone naturalmente que el punto material resbala, bajo la accion de la pesantez i sin rozamiento, sobre la curva que une los puntos O i A; entónces el teorema de la fuerza viva da

$$\frac{1}{2} v^2 = g x$$

Como la velocidad v depende solo de la abcisa x, el camino buscado estará forzosamente situado en el plano vertical que pasa por los puntos O, A.

Sea, en este plano, OY un eje perpendicalar a OX, se tendrá

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$$

Luego

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}$$

Finalmente, el tiempo T que demora el punto para pasar de O a A será dado por la integral

$$T = \int_0^h \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}$$

Se trata de determinar la forma del camino para que T sea un mínimo.

Si se compara el valor de T con la integral (1) se observa que

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}$$

La funcion f no contiene y esplícitamente, luego, en la ecuacion (3) el primer término es nulo i la ecuacion misma se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C^{te}$$

Ademas, en el caso considerado, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{\sqrt{2gx}}$$

Luego la ecuacion diferencial de la curva buscada es

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx}\ \sqrt{1+y'^2}}=C$$

O bien si se designa por a una constante

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

De aquí se deduce

$$y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

Hagamos

$$x=a\ (1-\cos u)$$

Tendremos

$$dy=a\ (1-\cos u)\ du$$

Luego

$$y=a\ (u-\operatorname{sen}\ u)+C^{te}$$

Como el punto de partida del punto material es el oríjen, la constante que figura en el valor de y debe ser nula, luego la curva buscada satisface a las ecuaciones

$$x=a\ (1-\cos u)$$

$$y=a\ (u-\operatorname{sen}\ u)$$

Es una cicloide; la circunferencia jeneratriz rueda sobre OX i tiene un radio igual a a. El valor de a se determina por la condicion que la cicloide pase por el punto A.

MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO

Supongamos que se trata de determinar las condiciones de máximo o mínimo de la integral

$$(4) \qquad I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

con la condicion que otra integral

$$(5) \qquad K = \int_a^b \phi(x, y, y')\, dx$$

en la cual figura tambien la funcion incógnita y, tenga un valor constante; se dice, en este caso, que el máximo o mínimo de la integral I es relativo.

Sea δy una variacion de y, las variaciones correspondientes de I i K serán nulas porque I debe ser por hipótesis máximo o mínimo i K constante, luego se debe tener, segun la fórmula (2),

$$(6) \qquad \int_a^b \delta y \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} \right\} dx = 0$$

$$(7) \qquad \int_a^b \delta y \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y'}\right)}{dx} \right\} dx = 0$$

En el caso del máximo o mínimo absoluto, las variaciones δy eran completamente arbitrarias entre los límites a i b de x; ahora estas variaciones deben satisfacer a las dos ecuaciones (6) i (7).

Designemos por δy_1, $\delta y_2 \ldots \delta y_n$ las n variaciones consecutivas de y entre las abcisas a i b; las condiciones (6) i (7) pueden escribirse bajo la forma

$$A_1 \ \delta y_1 + A_2 \ \delta y_2 + \ldots + A_n \ \delta y_n = 0$$

$$B_1 \ \delta y_1 + B_2 \ \delta y_2 + \ldots + B_n \ \delta y_n = 0$$

Si se despejara el valor de δy_1 de la primera ecuacion para llevarlo en la segunda, las $n-1$ variaciones restantes, en esta última ecuacion, serian completamente arbitrarias, luego los $n-1$ coeficientes de estas variaciones deberian ser nulos. Para eliminar δy_1 se multiplicará la segunda ecuacion por cierto coeficiente λ tal que

$$A_1 + B_1 \ \lambda = 0$$

entónces los coeficientes de los $n-1$ variaciones restantes en la ecuacion resultante seran evidentemente $A_2 + B_2 \ \lambda$, $A_3 + B_3 \ \lambda$, ... Se deberá tener, por consiguiente,

$$A_2 + B_2 \ \lambda = 0$$

$$A_3 + B_3 \ \lambda = 0$$

etc.

En estas relaciones, los A i B representan los valores de las espresiones entre paréntesis, en las ecuaciones (6) i (7), luego, para todos los valores de x comprendidos entre a i b, se debe tener

$$(8) \qquad \frac{\partial\,(f+\lambda\phi)}{\partial y} - \frac{d\left[\frac{\partial\,(f+\lambda\phi)}{\partial y'}\right]}{dx} = 0$$

Tal es por consiguiente la ecuacion diferencial que permitirá determinar y en funcion de x; en ella λ es una constante.

Se debe observar que la condicion (8) es idéntica a la que se hubiera obtenido en el caso del máximo o mínimo absoluto de la integral

$$I+\lambda K = \int_a^b (f+\lambda\,\phi)\,dx$$

Este resultado es precisamente el que se ha obtenido en la teoria usual del máximo i mínimo.

Aplicaciones

PROBLEMA I

Entre todas las curvas de perímetro K, terminadas a dos puntos dados, determinar la curva tal que el área I limitada por la curva, el eje de las abcisas i las dos ordenadas estremas, sea máximo o mínimo.

Se tiene, en este caso

$$I = \int_a^b y\,dx$$

$$K = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\;dx$$

Luego se debe buscar el máximo o mínimo absoluto de la integral

$$I+\lambda K=\int_a^b \left(y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right) dx$$

La condicion (3) nos dará la ecuacion diferencial

$$1-\frac{d\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx}=0$$

De aquí se deduce

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{x-C}{\lambda}$$

C es una constante arbitraria; en seguida, despejando a y' se obtiene

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2}}$$

Luego

$$y-c'=-\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2}$$

O bien

$$(x-c)^2+(y-c')^2=\lambda^2$$

Es la ecuacion de una circunferencia. La curva buscada es por consiguiente un arco de circunferencia de lonjitud K que pasa por los puntos dados.

PROBLEMA II.

Entre todas las curvas de mismo perímetro, que se pueden trazar en un plano entre dos puntos dados, determinar la curva que, jirando al rededor de OX, enjendra el área máximo o mínimo.

Se tiene, en este caso,

$$I = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$K = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Luego se debe buscar el máximo o mínimo absoluto de la integral

$$I + 2\pi\lambda K = 2\pi \int_a^b (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

La condicion (3) nos dará

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d\left(\dfrac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dc} = 0$$

En esta ecuacion diferencial, del segundo órden, x no figura esplícitamente, se puede por consiguiente rebajar su órden; se deduce, en efecto, de ella

$$\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{d\left(\frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dy}=0$$

Esta es una ecuacion diferencial del primer órden entre los variables y, y'. Si se efectúa la derivacion se obtiene

$$1+y'^2-\frac{y'\,dy'}{dy}(y+\lambda)=0$$

O bien

$$\frac{y'\,dy'}{1+y'^2}=\frac{dy}{y+\lambda}$$

Sea a, una constante, se tendrá

$$1+y'^2=\frac{(y+\lambda)^2}{a^2}$$

Luego

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}}{a}$$

O bien

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}}=\frac{dx}{a}$$

La integral es

$$L\left(y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}\right)=\frac{x+c}{a}$$

Luego

$$y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}=e^{\frac{x+c}{a}}$$

De aquí se deduce

$$y+\lambda-\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}=a^2e^{-\frac{x+c}{a}}$$

Luego

$$y+\lambda=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{x+c}{a}}+a^2e^{-\frac{x+c}{a}}\right\}$$

Esta es la ecuacion de una *catenaria.*

PROBLEMA III.

Entre todas las curvas de mismo perímetro que se pueden trazar en un plano entre dos puntos dados, determinar la curva que, jirando al rededor de OX, enjendra el volúmen máximo o mínimo.

La integral I es ahora

$$I=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

La integral K conserva el mismo valor que en el problema anterior i se tiene

$$I+\pi\lambda K=\pi\int_a^b\left(y^2+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx$$

La condicion del máximo o mínimo es, por consiguiente, segun (3),

$$2y-\frac{d\left(\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx}=0$$

Se obtiene de nuevo una ecuacion diferencial de segundo órden en la cual x no figura explícitamente, se deducirá por consiguiente de ella

$$2y=y'\frac{d\left(\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dy}=\frac{\lambda y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dy'}{dy}$$

Luego

$$2y\,dy=\frac{\lambda y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La integracion da

$$y^2+c=-\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Luego

$$1+y'^2=\frac{\lambda^2}{(y^2+c)^2}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\lambda^2-(y^2+c)^2}}{y^2+c}$$

Finalmente la ecuacion diferencial de la curva es

$$dx=\frac{(y^2+c)\,dy}{\sqrt{x^2-(y^2+c)^2}}$$

Es la ecuacion diferencial de la *curva elástica.*

SOLUCION DIRECTA DE ALGUNOS PROBLEMAS

Supongamos, en primer lugar, que se pida el camino mas corto de un punto a otro.

Podemos escribir las ecuaciones de la curva que une los dos puntos bajo la forma

$$x=f_1\,(t),\quad y=f_2\,(t),\quad z=f_3\,(t)$$

Representemos las derivadas de x, y, z respecto a t por x' y' z' i sea s la lonjitud del arco de curva comprendido entre los dos puntos, se tendrá

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\quad dt$$

Luego

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad dt$$

Hagamos variar las funciones f_1, f_2, f_3 tendremos para la variacion correspondiente de s

$$\delta s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad dt$$

Tenemos que espresar $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ en funcion de δx, δy, δz; para esto se debe observar que

$$\delta x' = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d(x + \delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d(\delta x)}{dt}$$

Consideremos entónces la integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \phi_1(t)\, \delta x' = \int_{t_0}^{t_1} \phi_1(t) \frac{d(\delta x)}{dt} \, dt$$

La regla de integracion por partes nos dará

$$A = \left[\phi_1(t)\, \delta x\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta x \frac{d\phi_1}{dt} \, dt$$

O bien, si se observa que δx es nulo en los dos límites,

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} \delta x \frac{d\phi_1}{dt}\, dt$$

La espresion de δs tomará por consiguiente la forma

$$\delta s = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta x \frac{d\phi_1}{dt} + \delta y \frac{d\phi_2}{dt} + \delta z \frac{d\phi_3}{dt} \right) dt$$

Ahora

$$\phi_1(t) = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dx}{ds}$$

Las fórmulas son análogas para $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, luego

$$(9) \quad \delta s = -\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta x \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} + \delta y \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt} + \delta z \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt} \right\} dt$$

Para que s sea mínimo es necesario que δs sea nulo cualquiera que sean los valores de δx, δy, δz; luego es necesario que se tenga, para todos los valores de t

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt} = 0$$

O bien

$$\frac{dx}{ds} = \alpha$$

$$\frac{dy}{ds} = \beta$$

$$\frac{dz}{ds} = \gamma$$

α, β, γ son tres constantes.

Las ecuaciones de la curva buscada son, por consiguiente,

$$x = \alpha s + C_1$$

$$y = \beta s + C_2$$

$$z = \gamma s + C_3$$

Ellas representan una *línea recta.*

Líneas jeodésicas.

Se sabe que una línea jeodésica es, por definicion, el camino mas corto de un punto a otro sobre una superficie dada.

La variacion δs de la distancia s de los dos puntos será dada todavia por la ecuacion (9), pero las variaciones δx, δy, δz no son completamente arbitrarias; sea en efecto

$$F(x\ y\ z) = 0$$

la ecuacion de la superficie; se debe tener, para todos los valores de t,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z=0 \tag{10}$$

Para que el camino trazado sobre la superficie sea mínimo es necesario que δs sea igual a cero, luego las variaciones arbitrarias δx, δy, δz deben satisfacer a la condicion $\delta s=0$ i a la ecuacion (10). Es el caso del mínimo relativo i las consideraciones espuestas mas arriba, muestran que los coeficientes de δx, δy, δz en las dos ecuaciones deben ser proporcionales, cualquiera que sea t. En resúmen se debe tener, en todos los puntos de la curva buscada,

$$\frac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Estas ecuaciones espresan que en cada punto de la curva, la normal principal coincide con la normal a la superficie o bien que el plano osculador, en cada punto de la curva, es normal a la superficie.

Es precisamente la condicion obtenida en el capítulo III.

A. OBRECHT

FIN